Definiciones

Álgebra Lineal II

Tema I – *Formas canónicas de endomorfismos*

- Autovalor y autovector (pág. 183)

Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ diremos que es un ***autovalor*** o ***valor propio*** de un endomorfismo f si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$. Se denomina *espectro* de f y se denota $sp(f)$ al conjunto formado por todos los autovalores de f.

Un vector $v \in V$ se dice que es ***autovector*** o ***vector propio*** asociado a un autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ de f si y sólo si $f(v) = \lambda v$. Al conjunto formado por todos los autovectores asociados a un autovalor λ se le denomina *subespacio propio asociado* a λ y lo denotamos por $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$.

- Subespacio propio asociado (pág. 183)

Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, un endomorfismo f y un autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ de f, llamamos ***subespacio propio asociado a $\boldsymbol{\lambda}$*** al conjunto de todos los autovectores asociados al autovalor λ , y lo denotamos por

$$V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$$

- Polinomio característico (pág. 185)

Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión n y A una matriz de f respecto de una base $\mathcal{B}$. Se denomina ***polinomio característico*** de f, o de A, al polinomio de grado n en la indeterminada λ que se obtiene como

$$p_f(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

El polinomio característico de un endomorfismo no depende de la base con respecto a la que representemos la matriz. Es decir, el polinomio es un *invariante lineal.*

- Endomorfismo diagonalizable (pág. 186)

Un endomorfismo f se dice que es ***diagonalizable*** si existe una base $\mathcal{B}$ tal que la matriz de f en dicha base, $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$, es diagonal.

- Matriz diagonalizable (pág. 186)

Una matriz cuadrada A se dice que es ***diagonalizable*** si es semejante a una matriz diagonal D, es decir, si existe una matriz regular P tal que $D = P^{-1}AP$. Como definición alternativa podríamos decir que una matriz cuadrada A es ***diagonalizable*** si y sólo si el endomorfismo cuya matriz en cierta base es A es diagonalizable.

- <u>Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor</u> (pág. 189)

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalores distintos de un endomofismo f. Llamamos:

(1) ***Multiplicidad algebraica*** del autovalor λ_i a su multiplicidad como raíz del polinomio característico, y la denotaremos por a_i.

(2) ***Multiplicidad geométrica*** del autovalor λ_i a la dimensión del subespacio propio asociado, $dim\, V_{\lambda_i}$, y la denotaremos por g_i. Es decir, $g_i = dim\, V_{\lambda_i} = n - rg(A - \lambda_i I)$.

- <u>Bloque de jordan</u> (pág. 193)

Un ***bloque de Jordan*** de orden n es una matriz cuadrada de orden n, que denotaremos por $B_n(\lambda)$, donde los elementos de la diagonal principal son todos $\lambda \in \mathbb{K}$, los elementos de la subdiagonal son todos 1 y el resto de los elementos son 0.

- <u>Matriz de jordan</u> (pág. 193)

Una ***matriz de Jordan*** es una matriz cuadrada diagonal por bloques de modo que los bloques de la diagonal son todos bloques de Jordan.

- <u>Subespacio invariante</u> (pág. 193)

Un subespacio vectorial U de V se dice que es ***invariante*** por un endomorfismo f o que es ***f-invariante*** si se cumple $f(U) \subset U$. Es decir: $\forall u \in U, f(u) \in U$. Equivalentemente, $U = L(v_1, \dots, v_k)$ es un subespacio invariante si y sólo si $f(v_1), \dots, f(v_k) \in U$.

- <u>Aplicación restricción</u> (pág. 195)

Dada una aplicación cualquiera $f : A \to B$ y un subconjunto S de A, llamamos ***aplicación restricción de f a S*** a la aplicación $f|_S : S \to B$ definida como:

$$\begin{aligned} f|_S : S &\longrightarrow B \\ s &\longmapsto f(s) \end{aligned}$$

Se trata de la misma aplicación, pero con un dominio restringido.

- <u>Subespacio r-cíclico</u> (pág. 197)

Para todo $r \geq 1$, si $v \in Ker(f - \lambda Id)^r - Ker(f - \lambda Id)^{r-1}\}$, entonces los vectores del conjunto

$$\{v, (f - \lambda Id)^r(v), \dots, (f - \lambda Id)^{r-1}(v)\}$$

son linealmente independientes. Al subespacio vectorial U que generan se le denomina ***subespacio r-cíclico*** generado por v asociado a $f - \lambda Id$ y es un subespacio invariante. Además, la matriz del endomorfismo restricción respecto de esa base es un bloque de Jordan de orden r.

- Subespacio propio generalizado (pág. 199)

Se denomina ***subespacio propio generalizado i-ésimo*** asociado a un autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ de un endomorfismo f al subespacio vectorial

$$K^i(\lambda) = Ker(f - \lambda Id)^i \quad con\ i \in \mathbb{N}^*$$

El subespacio propio generalizado primero coincide, naturalmente, con el *subespacio propio asociado*: $K^1(\lambda) = V_\lambda$.

- Subespacio máximo asociado a un autovalor (pág. 199)

Existe un entero $k > 0$ tal que se tiene la cadena ascendente de subespacios hasta alcanzar uno de dimensión máxima:

$$V_\lambda = K^1(\lambda) \subsetneq K^2(\lambda) \subsetneq \cdots \subsetneq K^k(\lambda) = K^{k+1}(\lambda) = \cdots = K^j(\lambda) = \cdots \quad \forall j \geq k$$

Se denomina ***subespacio máximo asociado a $\boldsymbol{\lambda}$*** al subespacio

$$M(\lambda) = K^k(\lambda) = Ker(f - \lambda Id)^k$$

- Forma canónica de Jordan (pág. 211)

Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Diremos que f admite una forma canónica de Jordan si existe una base $\mathcal{B}$ tal que la matriz de f en dicha base es una matriz de Jordan J. Llamamos ***forma canónica de Jordan*** de f a la matriz J, que es única salvo permutación de bloques de Jordan.

- Extensión compleja (pág. 213)

Dado un espacio vectorial real V, llamamos ***extensión compleja de V*** o ***complexificación de V*** al conjunto

$$\hat{V} = \{u + wi : u, w \in V\}$$

El conjunto $\hat{V}$ es un espacio vectorial complejo de la misma dimensión que V. Naturalmente, $V \subset \hat{V}$.

Tema II – *Subespacios invariantes*

- Subespacio invariante reducible e irreducible (pág. 226)

Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial real V y U un subespacio f-invariante. Diremos que U es ***reducible*** si se puede descomponer en suma directa de subespacios f-invariantes no triviales:

$$U = U_1 \oplus U_2$$

En caso contrario, diremos que U es un subespacio invariante ***irreducible***.

- <u>POLINOMIO ANULADOR Y POLINOMIO MÍNIMO</u> (pág. 240-245)

Diremos que un polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ anula a un endomorfismo f o que es un ***polinomio anulador*** de f si $p(f)$ es el endomorfismo nulo, lo cual expresamos diciendo $p(f) = 0$. En términos matriciales, si A es una matriz cualquiera de f, entonces $p(A)$ es la matriz nula o también $p(A) = 0$.

El teorema de Caylay-Hamilton asegura que ***el polinomio característico de un endomorfismo es un polinomio anulador del mismo***: si $p_f(t) \in \mathbb{K}[t]$ es el polinomio característico de un endomorfismo f, entonces $p_f(f) = 0$.

Un endomorfismo f tiene muchos polinomios anuladores; uno de ellos es el polinomio característico. Llamamos ***polinomio mínimo anulador*** de un endomorfismo f al polinomio $m_f(t) \in \mathbb{K}[t]$ mónico (el coeficiente del término de mayor grado es 1) de grado mínimo que anula a f.

TEMA III – *Formas bilineales y cuadráticas*

- <u>FORMA MULTILINEAL</u> (pág. 251)

Una ***forma multilineal*** $f : V \times \dots \times V \to \mathbb{K}$ es una aplicación lineal en cada una de sus componentes que convierte una n-tupla de vectores en un escalar del cuerpo $\mathbb{K}$. Un ejemplo de forma multilineal es el determinante.

- <u>FORMA BILINEAL</u> (pág. 252)

Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, una aplicación $f : V \times V \to \mathbb{K}$ se dice que es una ***forma bilineal*** si cumple las siguientes dos propiedades para todos tres vectores $u, v, w \in V$ y todo escalar $a, b \in \mathbb{K}$ (que determinan la bilinealidad de forma resumida):

(1) $f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$
(2) $f(u, av + bw) = af(u, v) + bf(u, w)$

- <u>MATRIZ DE UNA FORMA BILINEAL</u> (pág. 254-255)

Sea V un espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de ese espacio vectorial y f una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$. Se denomina ***matriz de la forma bilineal f respecto de la base*** $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ a la matriz cuadrada A de orden n tal que

$$f(x, y) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^t A Y$$

Los elementos a_{ij} de la matriz A se obtienen haciendo $a_{ij} = f(v_i, v_j)$, con $v_i, v_j \in \mathcal{B}$.

- <u>RANGO DE UNA FORMA BILINEAL</u> (pág. 257)

Se llama ***rango de una forma bilineal f*** al rango de cualquier matriz de f.

- <u>Forma bilineal simétrica y antisimétrica</u> (pág. 258)

Una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ se dice que es:

(a) ***simétrica*** si $f(u, v) = f(v, u)\ \forall u, v \in V$
(b) ***antisimétrica*** si $f(u, v) = -f(v, u)\ \forall u, v \in V$

En términos matriciales, una forma bilineal se dice simétrica o antisimétrica dependiendo de si una matriz A de f es simétrica ($A = A^t$) o antisimétrica ($A = -A^t$), respectivamente.

- <u>Forma cuadrática</u> (pág. 259-260)

Se llama ***forma cuadrática*** asociada a la forma bilineal f de V a la aplicación $\Phi : V \to \mathbb{K}$ definida por $\Phi(v) = f(v, v)$.

Alternativamente, una aplicación $\Phi : V \to \mathbb{K}$ es una ***forma cuadrática*** si y sólo si cumple las siguientes propiedades:

(1) $\Phi(\lambda v) = \lambda^2 \Phi(v)\ \forall v \in V$
(2) La aplicación $f_\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ definida por $f_\Phi(u, v) = \frac{1}{2}[\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi(v)]$ es una forma bilineal simétrica (que se denomina *forma polar de* Φ).

- <u>Forma polar</u> (pág. 260)

Dada una forma cuadrática $\mathit{\Phi} : V \to \mathbb{K}$, llamamos ***forma polar*** asociada a $\mathit{\Phi}$ a la única forma bilineal $f_\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que f_Φ es simétrica y $f_\Phi(u, u) = \Phi(u)$ para todo $u \in V$. Esta forma bilineal puede obtenerse como

$$f_\Phi(u, v) = \frac{1}{2}[\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi(v)]$$

- <u>Matriz de una forma cuadrática</u> (pág. 261)

Se denomina ***matriz de una forma cuadrática $\boldsymbol{\mathit{\Phi}}$*** en una base $\mathcal{B}$, y se denota por $\mathcal{M}_\mathcal{B}(\Phi)$, a la matriz de su forma polar en dicha base, de modo que

$$\Phi(x) = X^t \mathcal{M}_\mathcal{B}(\Phi) X$$

Esta expresión recibe el nombre de *expresión analítica* o *ecuación de $\mathit{\Phi}$ en la base $\mathcal{B}$*.

- <u>Vectores conjugados respecto a una forma cuadrática</u> (pág. 263)

Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica (o bien la forma polar asociada a una forma cuadrática, en caso de partir de una de ese tipo). Dos vectores $u, v \in V$ se dice que son ***conjugados respecto a $\boldsymbol{f}$*** (o respecto a Φ) si $f(u, v) = 0$.

- <u>Vector autoconjugado o isótropo</u> (pág. 263)

Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica. Un vector no nulo $u \in V$ se dice ***autoconjugado*** o ***isótropo*** si $f(u, u) = 0$.

- <u>Forma bilineal no degenerada</u> (pág. 263)

Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica. El núcleo o radical de f es el conjunto

$$Ker(f) = \{u \in V : f(u, v) = 0 \ \forall v \in V\}$$

Se dice que f es ***no degenerada*** si $Ker(f) = \{0\}$.

- <u>Conjugado de un subconjunto</u> (pág. 265)

Sea V un espacio vectorial y $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica. Se llama ***conjugado de un subconjunto*** $S \subset V$ respecto a f, y se denota por S^c, al conjunto formado por todos los vectores que son conjugados de todos los vectores de S:

$$S^c = \{u \in V : f(u, v) = 0 \ \forall v \in S\}$$

- <u>Forma cuadrática diagonalizada</u> (pág. 269)

Dada una forma cuadrática $\Phi : V \to \mathbb{K}$ y una base $\mathcal{B}$ de V, se dice que Φ está ***diagonalizada*** o ***escrita como suma de cuadrados***, respecto a $\mathcal{B}$, si la matriz de Φ en dicha base es $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = diag(d_1, \dots, d_n)$ y su expresión analítica es

$$\Phi(x) = X^t D X = d_1 x_1^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

- <u>Clasificación de formas bilineales y cuadráticas reales</u> (pág. 273)

Una forma bilineal simétrica $f : V \times V \to \mathbb{K}$ se dice que es:

(a) ***Definida positiva*** si $f(v, v) > 0 \ \forall v \in V, v \neq 0$
(b) ***Semidefinida positiva*** si $f(v, v) \geq 0 \ \forall v \in V \ y \ f(v, v) = 0$ para algún $v \neq 0$
(c) ***Definida negativa*** si $f(v, v) < 0 \ \forall v \in V, v \neq 0$
(d) ***Semidefinida negativa*** si $f(v, v) \leq 0 \ \forall v \in V \ y \ f(v, v) = 0$ para algún $v \neq 0$
(e) ***Indefinida*** en cualquier otro caso.

- <u>Signatura (de una forma cuadrática)</u> (pág. 274)

Dada una forma bilineal simétrica real $f : V \times V \to \mathbb{R}$ o su forma cuadrática asociada $\Phi : V \to \mathbb{R}$ y una matriz diagonal de f o de Φ, $D = \mathcal{M}(f) = \mathcal{M}(\Phi)$, llamamos ***signatura de f o signatura de Φ***, denotada por $sg(f) \ o \ sg(\Phi)$, al par $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tal que p es la cantidad elementos positivos en D y q es la cantidad de elementos negativos. La signatura de una forma bilineal o cuadrática permite clasificarla, determinado si es definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, etc.

- LEY DE INERCIA DE SYLVESTER (pag. 274)

Sea f una forma bilineal simétrica y real y Φ la forma cuadrática asociada. La ***ley de inercia de Sylvester*** asegura que en cualquier matriz diagonal de f el número de elementos positivos p y negativos q es siempre el mismo, siendo $p + q = rg(f)$. El par (p, q) se denomina signatura de f o de Φ, y se denota por $sg(f)$ *o* $sg(\Phi)$, respectivamente.

- CRITERIO DE SYLVESTER (pág. 275)

Sean A una matriz cualquiera de una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ y Δ_i, con $i \in [1, n]_\mathbb{N}$, los menores principales de la matriz A. Entonces, el ***criterio de Sylvester*** asegura que

(1) f es *definida positiva* si y sólo si $\Delta_i = det(A_i) > 0 \ \forall i \in [1, n]_\mathbb{N}$
(2) f es *definida negativa* si y sólo si $(-1)^i \Delta_i = det(A_i) > 0 \ \forall i \in [1, n]_\mathbb{N}$

TEMA IV – *Espacio vectorial euclídeo*

- PRODUCTO ESCALAR (pág. 283)

Un ***producto escalar*** en un espacio vectorial real V es una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{R}$ simétrica y definida positiva. Suele utilizarse la notación $<,>$ para referirse a ellos. Un espacio vectorial real dotado de operación de producto escalar pasa a convertirse en *espacio vectorial euclídeo*.

- ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO (pág. 284)

Un ***espacio vectorial euclídeo*** es un espacio vectorial real V donde se ha definido un producto escalar $<,> : V \times V \to \mathbb{R}$. Se denota por $(V, <,>)$.

- MATRIZ DE UN PRODUCTO ESCALAR, MATRIZ MÉTRICA O MATRIZ DE GRAM (pág. 286)

Dado un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$ de dimensión n con una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, llamamos ***matriz del producto escalar*** $<,>$, ***matriz métrica*** o ***matriz de Gram***, y se denota por $G_\mathcal{B}$, a la matriz simétrica de orden n de la forma bilineal simétrica definida positiva que constituye el producto escalar de ese espacio vectorial euclídeo. Es decir, la matriz simétrica de orden n tal que

$$< x, y >= (x_1, \dots, x_n) G_\mathcal{B} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^t G_\mathcal{B} Y \quad \forall x, y \in V$$

Los elementos g_{ij} de la matriz se obtienen haciendo $g_{ij} =< v_i, v_j >$ con $v_i, v_j \in \mathcal{B}$.

- NORMA (pág. 288)

Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Se define la ***norma*** o ***longitud*** de un vector $u \in V$ como el número real no negativo

$$||u|| = \sqrt{< u, u >}$$

Un vector de norma 1 se denomina *vector unitario*.

Algunas relaciones notables de la norma son:

(a) $| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$ (*Desigualdad de Cauchy-Schwartz*)
(b) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (*Desigualdad triangular o de Minkowski*)
(c) $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 \Leftrightarrow < u, v > = 0$ (*Teorema de Pitágoras*)
(d) $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$ (*Ley del paralelogramo*)

- <u>Ángulo entre vectores</u> (pág. 289)

En un espacio vectorial euclídeo $(V, <, >)$, se define el ***ángulo entre dos vectores*** $u, v \in V$ como

$$\measuredangle(u, v) = arc\,cos(\frac{< u, v >}{||u|| \cdot ||v||})$$

- <u>Ortogonalidad y conjuntos ortogonales</u> (pág. 291)

Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Dos vectores $u, v \in V$ se dice que son ***ortogonales***, y se denota por $u \perp v$, si son conjugados por el producto escalar $<, >$, es decir si $< u, v >= 0$.

Un conjunto de vectores no nulos $\{v_1, \dots, v_k\}$ es un ***conjunto ortogonal*** si los vectores son ortogonales dos a dos, es decir: $< v_i, v_j >= 0 \quad \forall i \neq j$.

- <u>Base ortogonal y ortonormal</u> (pág. 291)

Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Una ***base ortogonal*** de V es una base formada por un conjunto ortogonal (sus vectores son ortogonales dos a dos), y una ***base ortonormal*** es una base ortogonal cuyos vectores son unitarios, es decir, de norma la unidad.

Una base es ortogonal si y sólo si la matriz del producto escalar en dicha base es diagonal. Una base es ortonormal si y sólo si la matriz del producto escalar en dicha base es la identidad.

- <u>Coeficientes de Fourier</u> (pág. 293)

Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonal. Las coordenadas de un vector $u \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}$ son

$$u = \left(\frac{< u, v_1 >}{||v_1||^2}, \dots, \frac{< u, v_n >}{||v_n||^2}\right)_{\mathcal{B}}$$

Dichas coordenadas se denominan ***coeficientes de Fourier*** de u respecto de $\mathcal{B}$.

- <u>Subconjuntos ortogonales y complemento ortogonal</u> (pág. 295)

Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Dados dos subconjuntos S y T de V se dice que son ***ortogonales*** y se denota por $S \perp T$ si se cumple que todos los vectores de S son ortogonales a todos los de T y viceversa.

Dado un subconjunto $S \subset V$ llamaremos ***ortogonal*** o ***complemento ortogonal de S***, y lo denotaremos por $S^{\perp}$, al conjunto conjugado de S por el producto escalar:

$$S^{\perp} = \{u \in V : u \perp v \ \forall v \in S\} = \{u \in V : < u, v > = 0 \ \forall v \in S\}$$

- <u>Proyección ortogonal de un vector sobre un plano</u> (pág. 297)

Sean $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo, U un subespacio vectorial de V y $v \in V$. Llamaremos ***proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio U***, y se denota por $proy_U(v)$ al único vector tal que

(1) $proy_U(v) \in U$
(2) $v - proy_U(v) \in U^{\perp}$

- <u>Distancias</u> (pág. 299)

Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo y dos vectores de ese espacio $u, v \in V$. Se define la ***distancia*** entre ellos como

$$dist(u, v) = ||v - u||$$

Dado U un subespacio vectorial de V y $u \in V$, se define la ***distancia entre un vector y el subespacio U*** como

$$dist(u, U) = mín\{||v - u|| : \ v \in U\}$$

- <u>Producto vectorial</u>: (pág. 302)

Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo tridimensional. El ***producto vectorial*** de dos vectores linealmente independientes $u, v \in V$ se define como el vector $u \wedge v \in V$ que cumple las siguientes condiciones:

(1) $u \wedge v$ es ortogonal a u y a v.
(2) $||u \wedge v|| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot sen \measuredangle(u, v)$
(3) La orientación de $\{u, v, u \wedge v\}$ es positiva.

Si $u, v \in V$ son linealmente independiente, entonces $u \wedge v = 0$.

- <u>Producto mixto</u>: (pág. 304)

Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo tridimensional, $\mathcal{B}$ una base positivamente orientada de V y sean $u = (u_1, u_2, u_3)_\mathcal{B}$, $v = (v_1, v_2, v_3)_\mathcal{B}$ y $w = (w_1, w_2, w_3)_\mathcal{B}$ tres vectores de V. Se define el ***producto mixto*** de u, v y w como

$$[u, v, w] =< u \wedge v, w >= det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

- <u>Endomorfismo simétrico</u> (pág. 306)

Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo y sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Se dice que f es un ***endomorfismo simétrico*** si cumple

$$< u, f(v) >=< f(u), v > \ \ \forall u, v \in V$$

- <u>Teorema espectral</u> (pág. 307)

Sea f un endomorfismo simétrico de un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$ de dimensión finita, $V \neq \emptyset$. Entonces, *existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f.*

- <u>Regla de Descartes</u> (pág. 309)

Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ un polinomio de grado n de coeficientes reales con n raíces reales no necesariamente distintas. Consideramos la sucesión formada por sus coeficientes, $\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\}$, y eliminamos los que sean nulos. Entonces, el número de raíces positivas del polinomio, contadas con su multiplicidad, es igual al número de cambios de signo entre los coeficientes consecutivos de la sucesión obtenida.

Tema v – *Isometrías vectoriales*

- <u>Isometría vectorial o transformación ortogonal</u> (pág. 325)

Sean $(V, <,>)$ y $(V', <,>')$ dos espacios vectoriales euclídeos. Una aplicación lineal $f : V \to V'$ es una ***isometría vectorial*** o ***transformación ortogonal*** si cumple

$$< u, v >=< f(u), f(v) >' \ \ \forall u, v \in V$$

Si f es una isometría vectorial entonces es un isomorfismo que conserva la norma y, por tanto, el ángulo entre vectores.

- <u>Grupo ortogonal</u> (pág. 328)

Se denomina ***grupo ortogonal*** y se denota por $\mathcal{O}(V)$ al conjunto de los isomorfismos ortogonales o isometrías vectoriales de V en sí mismo, que dotado de la operación de composición de aplicaciones tiene estructura de grupo. Por ser la composición de isometrías una isometría, se tiene que el grupo ortogonal es un subgrupo del *grupo lineal general*, $GL(V)$, formado por todos los isomorfismos de V.

- <u>Isometrías equivalentes</u> (pág. 331)

Sean $f, g \in \mathcal{O}(V)$ isometrías vectoriales de $(V, <, >)$. Diremos que f y g son ***métricamente equivalentes*** si y sólo si existe otra isometría h tal que

$$f = h^{-1} \circ g \circ h$$

Dos matrices A y B son ***ortogonalmente semejantes*** si y sólo si existe una matriz ortogonal P tal que $A = P^{-1}BP$.

- <u>Suma directa ortogonal</u> (pág. 331)

Sean U y W subespacios vectoriales del espacio vectorial euclídeo $(V, <, >)$. Llamaremos ***suma directa ortogonal*** y la denotaremos por $U \overset{\perp}{\oplus} W$ al caso en que se tenga suma directa $U \oplus W$ y los subespacios sean ortogonales.

- <u>Matriz de Jordan de una isometría</u> (pág. 333)

Sea $f \in \mathcal{O}(V)$ una isometría vectorial de $(V, <, >)$. Entonces, respecto de una base ortonormal, la ***matriz de Jordan real de f*** es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & & & C(\lambda_1) & & & & & & \\ & & & & & & & \ddots^{a_{\lambda_1}} & & & & & \\ & & & & & & & & C(\lambda_1) & & & & \\ & & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & & C(\lambda_r) & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots^{a_{\lambda_r}} & \\ & & & & & & & & & & & & C(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_j = cos\,\theta_j + i\,sen\,\theta_j$, $C(\lambda_j) = \begin{pmatrix} cos\,\theta_j & -sen\,\theta_j \\ sen\,\theta_j & cos\,\theta_j \end{pmatrix}$, $\theta_j \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

- <u>Rotación y reflexión</u> (pág. 334)

Sea f una isometría de un espacio vectorial euclídeo $(V, <, >)$, y A una matriz de la isometría respecto a una base ortonormal. Se dice que f es una ***rotación*** si $det\,A = 1$, y que f es una ***reflexión*** si $det\,A = -1$. El grupo $\mathcal{O}^+(V)$ formado por las isometrías de determinante 1, llamado *grupo de rotaciones*, es un subgrupo del grupo ortogonal $\mathcal{O}(V)$. El conjunto $\mathcal{O}^-(V)$ formado por las isometrías de determinante -1 no es subgrupo del grupo ortogonal, pues la composición de reflexiones es una rotación.

- <u>Simetría ortogonal</u> (pág. 334)

Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo y sea $\sigma : V \rightarrow V$ una simetría de base B y dirección D, subespacios de V tales que $V = B \oplus D$. Diremos que σ es una ***simetría ortogonal*** si la base y la dirección son subespaicos ortogonales $B^{\perp} = D$. Así, una simetría ortogonal queda completamente determinada dando la base o la dirección.

- <u>Clasificación de isometrías en $\mathbb{R}^2$</u> (pág. 335-338)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una isometría, $f \neq Id$, y sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz de la isometría en esa base es matriz de Jordan. Entonces, la isometría puede ser de dos formas:

(a) ***Simetría*** respecto a la recta formada por el subespacio de vectores fijos V_1, que forma un ángulo de $\alpha/2$ con el eje de abscisas. La matriz es de la forma:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz es -1, de modo que se trata de una *reflexión.*

(b) ***Rotación de ángulo $\boldsymbol{\alpha}$***, donde el subespacio de vectores fijos es el conjunto unitario $V_1 = \{(0{,}0)\}$ y la matriz toma la siguiente forma (que tiene determinante la unidad):

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Cabe destacar que la *composición de dos rotaciones* es otra rotación, cuyo ángulo es la suma de los ángulos de las rotaciones, $R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha+\beta}$; la *composición de dos simetrías* es una rotación cuyo ángulo es la diferencia de ángulos de las simetrías, $S_\alpha \cdot S_\beta = S_{\alpha-\beta}$; y, por último, la *composición de rotación y simetría* (y viceversa) es una simetría cuyo ángulo es la suma de los otros dos ángulos, $R_\alpha \cdot S_\beta = R_{\alpha+\beta}$. La composición de rotación y simetría y la composición de simetrías no son conmutativas.

- <u>Clasificación de isometrías en $\mathbb{R}^3$</u> (pág. 338-342)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una isometría, $f \neq Id$ y $f \neq -Id$, y sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de la isometría en esa base es matriz de Jordan. Entonces, la isometría puede ser de tres formas:

(a) Cuando $dim\, V_1 = 2$ tenemos una ***simetría respecto al plano $\boldsymbol{V_1}$*** y la matriz es de la forma

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Cuando $dim\, V_1 = 1$ tenemos un ***giro de ángulo α alrededor de la recta V_1***, y la matriz es de la forma:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$$

(c) Cuando $dim\, V_1 = 0$ tenemos una ***composición de simetría con giro*** y la matriz puede descomponerse como producto de estos:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- <u>SIMETRÍA ORTOGONAL HIPERPLANO</u> (pág. 343)

Una ***simetría ortogonal hiperplano*** es una simetría ortogonal cuya base es un hiperplano H. Un *hiperplano* es un subespacio vectorial de dimensión $n - 1$.

- <u>TEOREMA DE CARTAN-DIEUDONNÉ</u> (pág. 344)

Toda isometría f de un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$ de dimensión n es de la forma

$$f = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_k \ con\ k \leq n$$

siendo σ_i simetrías ortogonales hiperplano. Lo que también se expresa diciendo que *toda isometría puede descomponerse en producto de a lo más n simetrías ortogonales hiperplano.*

Noel Arteche Echeverría
23 de agosto de 2018